



Publié sur *La Vie des Classiques* (<https://96.ip-213-32-20.eu>)

[Accueil](#) > Arithm'Antique - Bonus n°20 : Archimède et la méthode d'exhaustion



## ARITHM'ANTIQUE - BONUS N°20 : ARCHIMÈDE ET LA MÉTHODE D'EXHAUSTION

23 Novembre 2017

***Tous les jeudis, Antoine Houlou-Garcia vous fait aimer les mathématiques à travers la philosophie, l'art, la mythologie et l'histoire antique !***

Comme nous l'avons vu dans la [vidéo consacrée à la mesure du cercle](#), Archimède utilise la méthode d'exhaustion d'Eudoxe - et la complète pour en faire une arme encore plus puissante - qui lui permet d'approximer un cercle par des polygones. Voici comment, grâce à sa méthode, il parvient à montrer l'équivalence d'un cercle et d'un triangle rectangle.

*Tout cercle est équivalent<sup>[1]</sup> à un triangle rectangle dans lequel l'un des côtés de l'angle droit est égal au rayon du cercle et la base (c'est-à-dire l'autre côté de l'angle droit) égale au périmètre du cercle.*

*Que le cercle  $AB\Gamma\Delta$  soit au triangle  $E$  comme l'indique l'hypothèse<sup>[2]</sup> ; je dis qu'il lui est équivalent.*

*Que le cercle soit en effet, si possible, plus grand<sup>[3]</sup>. Inscrivons-y le carré  $AF$  et divisons en deux parties égales les arcs (sc. admettant comme cordes les côtés du carré) ; que les segments de cercle aient à la fin (sc. si on répète les opérations de division en deux parties égales) une somme inférieure à la différence entre l'aire du cercle et celle du triangle<sup>[4]</sup>. La figure rectiligne sera donc encore plus grande que le triangle. Prenons le centre  $N$  et abaissons la perpendiculaire  $N\Xi$ .  $N\Xi$  sera donc inférieur au (sc. plus petit) côté du triangle<sup>[5]</sup>. Mais le périmètre de la figure rectiligne est à son tour plus petit que le côté restant<sup>[6]</sup>, du moment qu'il est plus petit que le périmètre du cercle. La figure rectiligne est par conséquent plus petite que le triangle  $E$ , ce qui est absurde.*

[[{"attributes": {}, "fields": {}}]]

Il va ensuite raisonner de la même manière avec un polygone inscrit et conclura que l'aire ne pouvant être ni plus petite ni plus grande, elle est identique.

La beauté de ce résultat établi par Archimède réside dans sa méthode : utilisant l'axiome de continuité (cf. [épisode 19](#)), il établit les prémisses du calcul infinitésimal. Mais Archimède ne s'arrête pas là et nous verrons la semaine prochaine le résultat dont il était le plus fier et qui permit à Cicéron de reconnaître son tombeau !

**[1]** En termes de surface, chose toujours sous-entendue dans la suite du texte.

**[2]** Le triangle  $E$  est donc rectangle, les deux côtés de l'angle droit ayant pour mesure le rayon et la circonférence du cercle.

**[3]** Archimède procède par l'absurde en supposant dans un premier temps que la surface du

cercle est plus grande que celle du triangle ; il étudiera ensuite l'hypothèse contraire.

**[4]** On construit une approximation du cercle grâce à des polygones inscrits, dont le nombre de côtés augmente pour assurer une précision croissante jusqu'à obtenir un écart de surface entre le polygone et le cercle qui soit plus petit que l'écart entre le cercle et le triangle. Cela est rendu possible grâce au cinquième postulat énoncé dans *De la sphère et du cylindre*.

**[5]** On se réfère ici au côté du triangle égal au rayon du cercle.

**[6]** Il s'agit du côté du triangle égal au périmètre du cercle.

**Tags :**

[Arithm'Antique](#)

[Archimède](#)

[Eudoxe](#)

[Pi](#)

---